

Luenberger-Beobachter und Extended Kalman-Filter: Ein Vergleich

Florian Bauer, Matrikelnummer: *****

20. Januar 2013

Abstract

Der Luenberger-Beobachter wird dazu verwendet, nicht messbare oder zu aufwändig messbare Systemzustände zu rekonstruieren, d.h. zu beobachten, in dem ein Streckenmodell parallel zur Strecke geschaltet wird. Damit Störungen abklingen, wird die Differenz des Messausgangs über eine Rückführverstärkung zurückgeführt. Beim Luenberger-Beobachter wird sie durch eine Dynamik-Vorgabe z.B. über eine Polplatzierung bestimmt. Je höher die Dynamik gewählt wird, desto schneller klingen zwar impulsförmige Störungen ab und desto kleiner ist der stationäre Fehler bei sprungförmigen Störungen, aber desto mehr wird auch das Messrauschen verstärkt. Damit sprungförmige Störungen zu keinem stationären Fehler des Zustandsvektors führen, muss ein Störgrößenbeobachter verwendet werden. Der stationäre Kalman-Filter ist in seiner Struktur identisch mit dem Luenberger-Beobachter, aber der Rückführvektor, d.h. die Kalman-Verstärkung, wird nur unter Berücksichtigung der Eigenschaften des System- und Messrauschens derart entworfen, dass das Rauschen der beobachteten, d.h. geschätzten, Zustände minimal wird. Eine Dynamikanforderung geht hierbei nicht mit in den Entwurf ein. Der Extended Kalman-Filter ist die Erweiterung auf nichtlineare Systeme, wobei bei der Berechnung der Kalman-Verstärkung anstelle der System-Matrizen die entsprechenden zeitvarianten Jacobi-Matrizen ähnlich einer Linearisierung verwendet werden, wodurch sich auch eine zeitvariante Kalman-Verstärkung ergibt. Nach den theoretischen Herleitungen und Vergleichen wurden Luenberger-Beobachter und Kalman-Filter schließlich für ein klassisches Testmodell aus der Mechatronik, der Gleichstromnebenschlussmaschine, entworfen und mit Hilfe von MATLAB/Simulink simuliert. Da Lastmomente konstante Störungen sind, die ohne Behandlung zu stationären Fehlern führen, war es sehr viel vorteilhafter, ein Störgrößenmodell einzubeziehen und daher einen Störgrößen-Luenberger-Beobachter bzw. Störgrößen-Kalman-Filter zu verwenden. Bei den fiktiven aber realitätsnahen Modellparametern hatte das Kalman-Filter so ein schlechtes dynamisches Verhalten, dass es vorteilhafter war, ein einfaches PT1-Filter mit relativ kleiner Zeitkonstante zur Glättung der beobachteten Zustände des Luenberger-Beobachters zu verwenden.

Keywords: Luenberger-Beobachter, Störgrößenbeobachter, Kalman-Filter, Extended Kalman-Filter, Rauschen, Beobachtbarkeit, stationäre Genauigkeit, Polplatzierung, MATLAB, Simulink.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	3
1 Einleitung	4
2 Theoretische Grundlagen	4
2.1 Grundidee der Zustandsbeobachtung	4
2.2 Luenberger-Beobachter	5
2.3 Beobachtbarkeit	7
2.4 Stationärer Fehler bei konstanter Störgröße	7
2.5 Stationär genauer Beobachter, Störgrößenbeobachter	8
2.6 Kalman-Filter	9
2.6.1 Einbeziehung von stochastischen Störgrößen	9
2.6.2 Geforderte Eigenschaften an das System- und Messrauschen	10
2.6.3 Berechnung der optimalen Rückführverstärkung \mathbf{L} bzw. Kalman-Verstärkung \mathbf{K}	11
2.7 Extended Kalman-Filter	12
2.8 Erweiterungen	13
3 Strukturvergleich	14
4 Vergleich mit dem linearen, zeitinvarianten SISO-Testmodell der Gleichstromnebenschlussmaschine	14
4.1 Testmodell	14
4.1.1 Mathematische Beschreibung der Gleichstromnebenschlussmaschine	14
4.1.2 Überführung des Testmodells in die Zustandsraumdarstellung	14
4.1.3 Untersuchung des Testmodells	16
4.1.4 Erweiterung des Zustandsraummodells um das Störgrößenmodell für sprungförmige Störungen M_L	16
4.1.5 Untersuchung des erweiterten Testmodells	17
4.1.6 Entwurf des Luenberger-Beobachters durch Polvorgabe	18
4.1.7 Entwurf des Störgrößen-Luenberger-Beobachters durch Polvorgabe	19
4.1.8 Entwurf des Kalman-Filters und des Störgrößen-Kalman-Filters	20
4.2 Vergleich im Frequenzbereich	21
4.3 Vergleich im Zeitbereich	21
4.3.1 Simulink-Modell und Parametrierung	21
4.3.2 Stell- und Störverhalten von einfachen Luenberger-Beobachter und einfachen Kalman-Filter	23
4.3.3 Stell- und Störverhalten von Störgrößen-Luenberger-Beobachter und Störgrößen-Kalman-Filter	26
4.3.4 Stell- und Störverhalten von Störgrößen-Luenberger-Beobachter und Störgrößen-Kalman-Filter bei Parameteränderungen	29
5 Resümee	32
Literatur	32
Anhang	33

Nomenklatur

Skalare Größen sind mit dünnen Buchstaben, z.B. $u \in \mathbb{R}$, Vektoren mit kleinen, fetten Buchstaben, z.B. $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, und Matrizen mit großen, fetten Buchstaben, z.B. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $m \in \mathbb{N}$, gekennzeichnet. Bei regelungstechnischen Größen werden strikt, wenn nicht anders angegeben, SI-Einheiten verwendet und daher in der Regel nicht mitgeschrieben. Bei der ersten Verwendung *jedes* Formelzeichens im Text wird die jeweilige Bedeutung genannt. Für sämtliche Größen werden die in der Literatur gängigen Symbole verwendet.

1 Einleitung

Zur Steuerung und Regelung dynamischer Systeme müssen der Steuerung bzw. der Regelung physikalische Größen der Strecke, die Zustandsgrößen, zugeführt werden. In der Regel werden diese Regelgrößen gemessen. Ist dies nicht oder nur mit großem Aufwand und großen Kosten möglich, müssen die Größen beobachtet bzw. geschätzt werden. Die Umsetzung solcher *Software-Sensoren* geschieht mit Hilfe von Luenberger-Beobachter bzw. Kalman-Filter. Ebenso kann insbesondere der Kalman-Filter herangezogen werden, wenn Messsignale zu stark verrauscht vorliegen. Für die genaue Positionsbestimmung bei Navigationsanwendungen hat sich der Kalman-Filter daher zum de facto Standard im letzten halben Jahrhundert etabliert [1, S. 1–29]. Neben der Ermöglichung der Erfassung nichtmessbarer Zustandsgrößen und Kosteneinsparungen, ist es mit dem Luenberger-Beobachter bzw. dem Kalman-Filter auch möglich fehlerhafte Sensoren zu detektieren bzw. damit eine gewisse Redundanz zu schaffen. Eine weitere Anwendung ist die Zustandsrückführung bzw. -regelung, da hierbei *alle* Systemzustände dem Regler zugeführt werden müssen. Soll eine Störgrößenaufschaltung umgesetzt werden, bei der die Störgröße nicht messbar ist, kann sie mithilfe eines Störgrößenbeobachters rekonstruiert werden.

In dieser Ausarbeitung, werden zunächst die theoretischen Grundlagen angefangen von der Idee des Luenberger-Beobachters und des Kalman-Filters, bis hin zu den Erweiterungen beispielsweise auf nichtlineare Systeme in Form des Extended Kalman-Filters vorgestellt. Anschließend wird ihre Struktur verglichen. Schließlich wird ein Luenberger-Beobachter und ein Kalman-Filter für das klassische Modell aus der Mechatronik, der Gleichstromnebenschlussmaschine, entworfen und ihr Verhalten im Frequenz- bzw. vielmehr im kontinuierlichen Zeitbereich in Form des Stell- und Störverhaltens mithilfe eines MATLAB/Simulink-Modells verglichen. In einem Resümee werden abschließend die Vor- und Nachteile von Luenberger-Beobachter und Kalman-Filter auch mit der Anwendung bei dem mechatronischen Testmodell zusammengefasst.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Grundidee der Zustandsbeobachtung

In Abb. 2.1 ist die prinzipielle Idee eines Beobachters gezeigt: Das reale System $G_S(s)$ wird durch die Eingangsgröße $u(t)$ angeregt. Dadurch reagiert es mit dem Ausgang $y(t)$. Allerdings wird es auch durch die Störung $d(t)$ angeregt. Parallel wird mit der gleichen Eingangsgröße $u(t)$ ein Modell des Systems $G_M(s)$ beaufschlagt. Damit entsprechen Ausgang und Zustände des Modells, $\hat{y}(t)$ und $\hat{x}(t)$, einem Schätzwert des Ausgangs bzw. der Zustände des realen Systems – das Modell *beobachtet das System*. [2, S. 317–348]

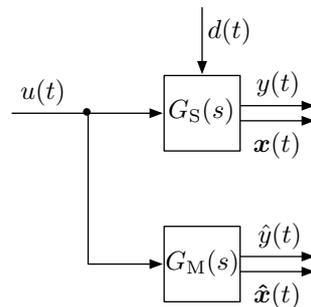


Abb. 2.1: Beobachter arbeitet parallel zur Strecke [2, S. 320]

In dieser Konfiguration geht die Differenz $y(t) - \hat{y}(t)$ bzw. $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ mit den zusätzlich in der Regel nicht kongruenten Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \neq \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0$ nur asymptotisch gegen 0,

- wenn es keine Störungen $d(t)$ gibt (oder diese erfasst und ebenfalls als Eingang auf das Modell gegeben werden könnten),
- das Modell das reale System *exakt* abbildet und
- das reale System stabil ist.

Da dies in aller Regel nicht gegeben ist, muss die Abweichung des Messausgangs von realem System und Modell, $y(t) - \hat{y}(t)$, in einer geeigneten Weise zurückgeführt werden – eine Art Regler für das Modell. [2, S. 317–348]

2.2 Luenberger-Beobachter

In Abb. 2.2 ist die Parallelschaltung von Abb. 2.1 in der Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

der hier nicht sprungfähigen, d.h. der Durchgriff $d = 0$, Übertragungsfunktionen $G_S(s)$ und $G_M(s)$ gezeigt. Hierbei sei die reale Strecke durch das Modell exakt nachgebildet wie die identischen Bezeichnungen der Systemmatrix \mathbf{A} , des Steuereingriffsvektors \mathbf{b} und des Ausgangsvektors \mathbf{c}^T verdeutlichen. Zusätzlich ist die von Luenberger vorgeschlagene Rückführung über den Rückführvektor \mathbf{l} zu einem Stelleingriff in das Modell umgesetzt. [2, S. 317–348]

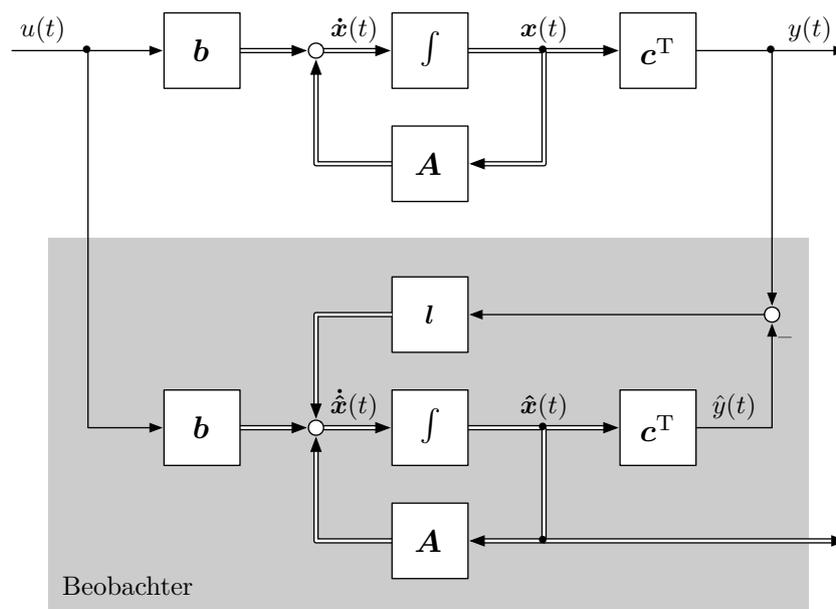


Abb. 2.2: Luenberger-Beobachter [2, S. 321]

Das Zustandsraummodell des Beobachters

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{u}_B(t), & \hat{\mathbf{x}}(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y}(t) &= \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

ergibt sich mit

$$\mathbf{u}_B(t) = \mathbf{l}(y(t) - \hat{y}(t)) = \mathbf{l}(y(t) - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{l}y(t) - \mathbf{l}\mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(t)$$

zu

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{l}y(t) - \mathbf{l}\mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(t) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{l}y(t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Der Beobachter arbeitet korrekt, wenn der Beobachtungsfehler

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$$

gegen 0 konvergiert. In die zeitliche Ableitung des Beobachtungsfehlers

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$$

kann die Zustandsgleichung des realen Systems (2.1) und die Beobachterzustandsgleichung (2.3) eingesetzt werden,

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) &= [\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)] - [(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{l}y(t)] \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{b}u(t) - \mathbf{l}y(t) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{l}y(t) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{l}\mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\mathbf{x}(t) - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\Delta \mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

was mit der Anfangsbedingung

$$\Delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0 = \Delta \mathbf{x}_0$$

einer Differentialgleichung entspricht. Damit ist die Beschreibung des Beobachtungsfehlers mit der eines autonomen Systems identisch. Der Beobachtungsfehler klingt für *beliebige* Anfangswerte $\Delta \mathbf{x}_0$ auch ungleich $\mathbf{0}$ ab, wenn die Beobachtungsfehlermatrix $\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$ stabil ist, d.h. alle Eigenwerte einen negativen Realteil haben. Dies gilt auch für *impulsförmige* Störungen $d(t) = \delta(t)$, da sie wie unterschiedliche Anfangszustände wirken und damit durch unterschiedliche Anfangszustände darstellbar sind. [2, S. 317–348] \square

Der Rückführvektor \mathbf{l} kann also in sofern frei gewählt werden, dass $\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$ nur Eigenwerte mit negativen Realteil besitzt. Allerdings klingt der Beobachtungsfehler schneller ab, je weiter links die Eigenwerte liegen. Das kann zwar eine große Verstärkung des Fehlers $y(t) - \hat{y}(t)$ und damit eine große Stellgröße $\mathbf{u}_B(t)$ nach sich ziehen. Eine Stellgrößenbegrenzung muss aber nicht beachtet werden, da der komplette Beobachter digital umgesetzt werden kann. [2, S. 317–348] Wann genau der Beobachtungsfehler abgeklungen ist, wird von den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ von $\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$, bzw. vor allem von den dominanten Eigenwerten von $\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$, bestimmt: Werden beispielsweise nur reellwertige Eigenwerte gewählt, entspricht Gl. (2.4) einer Kette von PT1-Gliedern. Dieses System hat bei impulsförmiger Anregung nach

$$T = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} = T_1 + T_2 + \dots + T_n \approx \frac{1}{\lambda_{\text{dominant}}} = T_{\text{dominant}} \quad (2.5)$$

seinen $e^{-1} = 0,37$ -fachen Wert erreicht und kann damit mit einem PT1 der kumulierten Zeitkonstante T aus Gl. (2.5) approximiert werden.

Weiteres Kriterium für die Wahl von \mathbf{l} ist, dass der Beobachtungsfehler schneller abklingen sollte, als Moden des realen System (2.1). Daher müssen die Eigenwerte *deutlich* links der jeweiligen Eigenwerte bzw. der dominierenden Eigenwerte des realen Systems \mathbf{A} platziert werden. Allerdings wird mit weit links platzierten Eigenwerten auch das Messrauschen von $y(t)$ verstärkt. Daher schlägt [2, S. 317–348] den Kompromiss vor, dass die Eigenwerte von $\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$ etwa 2 bis 6 mal weiter links als die Eigenwerte von \mathbf{A} platziert werden sollten.¹ [2, S. 317–348]

2.3 Beobachtbarkeit

Notwendige Bedingung, dass ein Beobachter für ein System entworfen werden kann, ist, dass das System vollständig beobachtbar ist, d.h. aus dem Verlauf der Eingangsgröße $u(\cdot)$ und der Messgröße $y(\cdot)$ kann der Zustandsvektor $\mathbf{x}(\cdot)$ rekonstruiert werden. Die mathematische Definition erfolgt umgekehrt, dass der Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ aus einem endlichen Verlauf der Eingangsgröße $u(\cdot)$ und der Messgröße $y(\cdot)$ im Intervall $[0, \infty)$ bestimmt werden kann. [2, S. 83–91]

Zur Bestimmung der Beobachtbarkeit kann das Beobachtbarkeitskriterium von Kalman herangezogen werden. Es besagt, dass das System vollständig beobachtbar ist, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix}$$

vollen Rang

$$\text{Rang } \mathbf{S}_B = n$$

hat. Die Eigenschaft Beobachtbarkeit ist damit nur von dem Paar $(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T)$ abhängig. [2, S. 83–91] Für den Beweis des Kriteriums wird auf weiterführende Literatur wie [2, S. 83–91] verwiesen.

2.4 Stationärer Fehler bei konstanter Störgröße

Wird die Strecke mit einer Störgröße $\mathbf{d}(t)$ über die Einkoppelmatrix \mathbf{C}_d beaufschlagt, arbeitet der Beobachter nicht mehr stationär genau. Zur Berechnung, wie groß die stationäre Abweichung

¹Bei einem SISO-Modell kann die Berechnung von \mathbf{l} auch über das mit Hilfe der Beobachtbarkeitsmatrix in die Beobachternormalform transformierte Zustandsraummodell des Systems bestimmt werden. Hierdurch ist es möglich, den Rückführvektor aus

$$\mathbf{l} = (a_{B0} \quad a_{B1} \quad \dots \quad a_{Bn-1})^T - (a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n-1})^T$$

zu berechnen, wobei a_{B_i} die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms aus der Polplatzierung λ_i^B und a_i die Elemente der rechten Spalte der in Beobachternormalform transformierten Systemmatrix ist. [2, S. 324–325] Da dieser Rechenweg aber kaum Vorteile birgt, wird er hier nicht weiter verwendet.

ist, muss in Gl. (2.4) die Störgröße der Strecke mitberücksichtigt werden,

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \\
&= [\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{C}_d\mathbf{d}(t)] - [(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{l}y(t)] \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{C}_d\mathbf{d}(t) - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{b}u(t) - \mathbf{l}y(t) \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_d\mathbf{d}(t) - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{l}y(t) \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_d\mathbf{d}(t) - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{l}\mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\mathbf{x}(t) - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_d\mathbf{d}(t) \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{C}_d\mathbf{d}(t) \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_d\mathbf{d}(t).
\end{aligned}$$

Bei stationärer Betrachtung, konvergiert der Beobachtungsfehler zu einem Festen Wert $\Delta\mathbf{x}(t) = \Delta\mathbf{x}$ und seine Ableitung $\Delta\dot{\mathbf{x}}(t)$ wird 0,

$$0 = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{C}_d\mathbf{d}.$$

Durch Umstellen der Gleichung ergibt sich schließlich der stationäre Fehler zu

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{C}_d\mathbf{d} \\
&\Delta\mathbf{x} = -(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)^{-1}\mathbf{C}_d\mathbf{d}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Diese Gleichung kann einfach interpretiert werden, wenn alle Variablen als skalare Größen angenommen werden,

$$\Delta x = -\frac{c_d}{a - lc}d.$$

Hierbei wird deutlich, je größer der Betrag der Verstärkung l gewählt wird, d.h. je weiter links die Eigenwerte der Beobachtungsfehlermatrix $\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$ platziert werden, desto geringer ist die stationäre Abweichung.

2.5 Stationär genauer Beobachter, Störgrößenbeobachter

Wird gefordert, dass der Beobachter stationär genau arbeiten soll, darf es keine sprunghaftigen Störungen $\mathbf{d}(t)$ geben. Sind solche Störungen vorhanden bietet sich die Lösungsmöglichkeit an, die Störgröße, sofern sie messbar ist, auch dem Luenberger-Beobachter in Gl. (2.2) zuzuführen,

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{C}_d\mathbf{d}(t) + \mathbf{u}_B(t). \tag{2.7}$$

Damit kürzt sich die Störung im Beobachtungsfehler heraus. Häufig ist es aber noch schwieriger die Störung zu messen als die Zustände. Sie soll schließlich durch einen übergeordneten Regler, ohne dass die Störgröße direkt gemessen wird, ausgeregelt werden. Daher ist diese Lösungsmöglichkeit nur rein theoretisch.

Eine zweite Lösungsmöglichkeit ist die Störgröße durch einen Störgrößenbeobachter zu rekonstruieren und anschließend Gl. (2.7) zuzuführen. Ein Störgrößenbeobachter entspricht aber lediglich einer Erweiterung des einfachen Beobachters, der wie im Folgenden gezeigt wird, bereits stationär genau arbeitet. *Gleichzeitig beobachtet der Störgrößenbeobachter natürlich auch die Störgröße, die beispielsweise für eine Störgrößenaufschaltung zur Verbesserung der Dynamik eines übergeordneten Reglers verwendet werden kann.* Hierfür wird für die Störgröße $\mathbf{d}(t)$ ein

autonomes Störgrößenmodell verwendet. Eine sprungförmige Störung kann durch das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_d(t) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(t) = \mathbf{0} \mathbf{x}_d(t) = \mathbf{0}, & \mathbf{x}_d(0) &= \mathbf{x}_{d,0} = \mathbf{d}_\infty \\ \mathbf{y}_d(t) &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(t) = \mathbf{C}_d \mathbf{d}_\infty\end{aligned}$$

mit einer beliebigen Sprunghöhe \mathbf{d}_∞ modelliert werden [3, S. 351–354]. Der Zustand der Störgröße wird nun als weiterer Systemzustand interpretiert, sodass die Zustandsgleichung des realen Systems zu

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_d(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_d(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (\mathbf{c}^T \quad \mathbf{0}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_d(t) \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.8}$$

sowie die Beobachterzustandsgleichung zu

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_d(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_d(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} u(t) + \mathbf{u}_B(t) \\ \hat{y}(t) &= (\mathbf{c}^T \quad \mathbf{0}) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_d(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

erweitert werden [2, S. 317–348]. Hierdurch äußern sich sprungförmige Störungen $\mathbf{x}_d(0) = \mathbf{x}_{d,0} = \mathbf{d}_\infty$ nur noch durch einen Anfangszustand bzw. als impulsförmige Störungen. Wie bereits im Abschnitt 2.2 unter Gl. (2.4) dargestellt, klingt der Beobachtungsfehler bei solchen Störungen ab. Daher ist auch die genaue Sprunghöhe \mathbf{d}_∞ unerheblich. \square

Allerdings muss sichergestellt werden, dass das Paar

$$\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d \end{pmatrix}, (\mathbf{c}^T \quad \mathbf{0}) \right)$$

noch beobachtbar ist. Ist das modellierte System nur mit der Berücksichtigung eines Teils des Störgrößenvektors beobachtbar, kann auch mit einem derart entworfenen Beobachter ein akzeptables Ergebnis erzielt werden [4, S. 29–30].

2.6 Kalman-Filter

2.6.1 Einbeziehung von stochastischen Störgrößen

Beim Kalman-Filter werden stochastische Störungen, das Systemrauschen $\mathbf{d}(t)$ und das Messrauschen $n(t)$, berücksichtigt. Das Zustandsraummodell erweitert sich damit zu²

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t) + \mathbf{d}(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + n(t).\end{aligned}$$

²Bei realen Systemmodellen ist es oft nicht sinnvoll Prozessrauschen so zu modellieren, dass es direkt auf den Integrierer wirkt. Dies kann mathematisch wie oben mit einer Einkoppelmatrix beschrieben werden. Diese Matrix müsste dann aber bei der weiteren Herleitung ebenfalls mit berücksichtigt werden.

Analog zu Gl. (2.4) ergibt sich nun der Beobachtungsfehler, der beim Kalman-Filter aufgrund seiner stochastischen Natur Schätzfehler genannt wird, zu

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \\
&= [\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{d}(t)] - [(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{l}y(t)] \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{d}(t) - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{b}u(t) - \mathbf{l}y(t) \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}(t) - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{l}y(t) \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}(t) - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{l}\mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) - \mathbf{l}n(t) \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\mathbf{x}(t) - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{d}(t) - \mathbf{l}n(t) \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{d}(t) - \mathbf{l}n(t) \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}(t) - \mathbf{l}n(t). \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Es wird also davon ausgegangen, dass der Beobachtungsfehler durch das System- und das Messrauschen ebenfalls zum Rauschen angeregt wird.

Die Auswirkungen der Störungen in Kombination mit der Wahl des Rückführvektors wird bei der Betrachtung der Dynamik des Beobachtungsfehlers deutlicher. Hierfür wird Gl. (2.9) in den Laplace-Bereich transformiert und in Ein-Ausgangsdarstellung umgestellt,

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}(t) - \mathbf{l}n(t) \\
s\Delta\mathbf{X}(s) &= (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\Delta\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}(s) - \mathbf{l}N(s) \\
s\Delta\mathbf{X}(s) - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\Delta\mathbf{X}(s) &= \mathbf{D}(s) - \mathbf{l}N(s) \\
(\mathbf{E}s - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T))\Delta\mathbf{X}(s) &= \mathbf{D}(s) - \mathbf{l}N(s) \\
\Delta\mathbf{X}(s) &= (\mathbf{E}s - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T))^{-1}\mathbf{D}(s) - (\mathbf{E}s - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T))^{-1}\mathbf{l}N(s),
\end{aligned}$$

wobei \mathbf{E} die Einheitsmatrix ist. Ähnlich zu Gl. (2.6) kann eine einfache Interpretation ermöglicht werden, wenn alle Variablen als skalare Größen angenommen werden, d.h.

$$\Delta X(s) = \frac{1}{s - (a - lc)}D(s) - \frac{l}{s - (a - lc)}N(s).$$

Wie in Gl. (2.6) bereits festgestellt, müsste im ersten Term l möglichst groß, gegen unendlich, gewählt werden damit das Systemrauschen $D(s)$ eliminiert wird. Um das Messrauschen $N(s)$ hingegen zu unterdrücken, müsste im zweiten Term l möglichst klein, gegen 0, gewählt werden. Mit der Auslegung des Kalman-Filters wird l schließlich so gewählt, dass System- und Messrauschen *optimal* unterdrückt werden und der geschätzte Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}(t)$ *minimal* rauscht. [5]

2.6.2 Geforderte Eigenschaften an das System- und Messrauschen

An beide Störgrößen $\mathbf{d}(t)$ und $\mathbf{n}(t)$ ³ wird gefordert, dass sie stationäre, mittelwertfreie, weiße, gaußsche, unkorrelierte Rauschprozesse sind. Im Einzelnen heißt das

- sie sind mittelwertfrei und besitzen damit den Erwartungswert $E(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ bzw. $E(\mathbf{n}) = \mathbf{0}$. Ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung ist durch

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

³Der Einfachheit halber wurde bisher ein SISO-System betrachtet. Um eine allgemeine mathematische Beschreibung zu erhalten, wird auch im folgenden oft der MIMO-Fall bevorzugt. Daher ist hier das Messrauschen vektoriell dargestellt. Unten werden auch Auskoppelvektor \mathbf{c}^T sowie Rückführvektor \mathbf{l} bzw. Kalman-Verstärkung \mathbf{k} allgemein als Matrizen \mathbf{C} , \mathbf{L} und \mathbf{K} dargestellt.

mit der Varianz $\sigma > 0$ gegeben (gaußsches Rauschen).

- Aufeinanderfolgende Werte sind dynamisch unabhängig, das Rauschen ist damit stationär.
- Aufeinanderfolgende Werte sind außerdem unkorreliert, mathematisch ausgedrückt

$$\begin{aligned} E(\mathbf{d}(t)\mathbf{d}(\tau)^T) &= \text{cov}(\mathbf{d}(t), \mathbf{d}(\tau)) = \mathbf{Q}\delta(t - \tau) = \begin{cases} \mathbf{Q} & \text{für } t = \tau \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases} \\ E(\mathbf{n}(t)\mathbf{n}(\tau)^T) &= \text{cov}(\mathbf{n}(t), \mathbf{n}(\tau)) = \mathbf{R}\delta(t - \tau) = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{für } t = \tau \\ \mathbf{0} & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $\delta(t)$ der Dirac-Impuls und t und τ zwei Zeitpunkte sind. D.h. auf der Diagonalen der konstanten und symmetrischen Matrizen \mathbf{Q} bzw. \mathbf{R} stehen die Varianzen der Elemente von $\mathbf{d}(t)$ bzw. $\mathbf{n}(t)$ und in den übrigen Elementen der Matrizen stehen die Kovarianzen. Im eindimensionalen Fall wäre beispielsweise

$$E(d(t)d(t)^T) = E(d^2(t)) = \text{var}(d) = Q.$$

Außerdem sind durch die Quadrierung aller Elemente von $\mathbf{d}(t)$ bzw. $\mathbf{n}(t)$ alle Elemente in \mathbf{Q} und \mathbf{R} positiv oder 0. Da nur Varianzen $\sigma_i > 0$ erlaubt sind, sind \mathbf{Q} und \mathbf{R} positiv definit.

- Schließlich wird gefordert, dass die Signale gegeneinander sowie mit dem geschätzten Anfangszustand unkorreliert sind, mathematisch ausgedrückt

$$E(\mathbf{d}(t)\mathbf{n}(\tau)^T) = \text{cov}(\mathbf{d}(t), \mathbf{n}(\tau)) = \mathbf{0}.$$

Ferner muss der Kalman-Filter mit einem Anfangszustand initialisiert werden. Hierfür wird der Erwartungswert des Anfangszustands

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 := E(\mathbf{x}(0))$$

verwendet. Auch hierfür wird die Unkorreliertheit zu dem Stör rauschen gefordert, das mathematisch mit

$$\begin{aligned} E(\mathbf{d}(t)\mathbf{x}_0^T) &= \text{cov}(\mathbf{d}(t), \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \\ E(\mathbf{n}(t)\mathbf{x}_0^T) &= \text{cov}(\mathbf{n}(t), \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

ausgedrückt wird. [6, S. 511-513]

2.6.3 Berechnung der optimalen Rückführverstärkung L bzw. Kalman-Verstärkung K

Wie bereits angeklungen, erhält man die optimale Rückführverstärkung L , die dann auch als Kalman-Verstärkung K bezeichnet wird, wenn sie so eingestellt wird, dass das Rauschen des geschätzten Zustandsvektors $\hat{\mathbf{x}}$ bzw. der quadratische Mittelwert des Schätzfehlers $\Delta\mathbf{x}$ und damit seine Varianz- bzw. Kovarianzmatrix

$$\mathbf{P}(t) = E(\Delta\mathbf{x}(t)\Delta\mathbf{x}^T(t)) = \text{var}(\Delta\mathbf{x}(t)) = \text{cov}(\Delta\mathbf{x}(t), \Delta\mathbf{x}(t))$$

minimal wird. Wenn das System (\mathbf{A}, \mathbf{C}) beobachtbar ist und die Matrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} positiv definit sind [6, S. 511-513], ergibt sich durch Ableiten nach einigen Rechenschritten die Matrix-Riccati-Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} - \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}(0) = E(\Delta\mathbf{x}(0)\Delta\mathbf{x}^T(0)), \quad (2.10)$$

wobei durch die bereits durchgeführte Einsetzung

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1} \quad (2.11)$$

$\mathbf{P}(t)$ minimal wird [7, S. 221–224]. Bei zeitinvarianten Systemen sind die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{C} zeitinvariant. Außerdem können \mathbf{Q} und \mathbf{R} zeitinvariant angesetzt werden. Dadurch konvergiert $\mathbf{P}(t)$ zu einem konstanten Wert \mathbf{P} und die Ableitung kann wie bei einer Minimumsuche zu Null gesetzt werden. Dadurch ergibt sich die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}, \quad (2.12)$$

mit deren konstanter, eindeutiger, positiv semidefiniter Lösungsmatrix \mathbf{P} auch eine konstante Kalman-Verstärkung

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}$$

entsteht [7, S. 221–224]. Die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung (2.12) muss beispielsweise numerisch gelöst werden.

Das hier dargestellte kontinuierliche Kalman-Filter wird in der Literatur, im Gegensatz zum zeitdiskreten Kalman-Filter, auch als Kalman-Bucy-Filter bezeichnet.

2.7 Extended Kalman-Filter

Der Extended Kalman-Filter ist die Erweiterung des Kalman-Filters auf nichtlineare Systeme

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{d}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{n}(t). \end{aligned}$$

Der Bobachter- bzw. Kalman-Filter hat die analoge Form

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{K}(t)(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)), & \hat{\mathbf{x}}(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(t)). \end{aligned}$$

Die Kalman-Verstärkung wird dabei so gebildet, als ob das System um einen Arbeitspunkt bzw. einer Trajektorie linearisiert wird. Durch letzteres entsteht eine lineare zeitvariante Systemmatrix und Ausgangsmatrix, die den Jacobi-Matrizen

$$\mathbf{A}(t) = \left. \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}(t) = \left. \frac{d\mathbf{h}}{d\mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(t)}$$

entsprechen. Die dadurch zeitvariante Kalman-Verstärkung berechnet sich damit über

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)^T + \mathbf{Q} - \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}(t)\mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{E}(\Delta\mathbf{x}(0)\Delta\mathbf{x}^T(0))$$

zu

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{R}^{-1}$$

und damit analog zu Gln. (2.10) und (2.11). [1, 306-311]

2.8 Erweiterungen

Luenberger-Beobachter und Kalman-Filter können problemlos auf sprungfähige Systeme, auf Mehrgrößensysteme – wie bereits bei der Herleitung zum Kalman-Filter angewendet –, sowie auf zeitvariante Systeme angewendet werden. Bei zeitvarianten Systemen ist dann auch die Rückführmatrix bzw. die Kalman-Verstärkung, $\mathbf{L}(t)$ bzw. $\mathbf{K}(t)$, zeitvariant.

Für eine praktische digitale Realisierung hat die Anwendung von Luenberger-Beobachter und Kalman-Filter im zeitdiskreten Bereich große Bedeutung. Für ein allgemeines, lineares, *zeitdiskretes*, System

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{n}_k\end{aligned}$$

mit dem Luenberger-Beobachter bzw. hier Kalman-Filter

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \\ \hat{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k.\end{aligned}$$

berechnet sich die Kalman-Verstärkung \mathbf{K}_k über die Matrix-Ricatti-Differenzgleichung

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T - \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k^T)^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k^T + \mathbf{Q}$$

zu

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k^T)^{-1}.$$

Ist das System linear und zeitinvariant $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}$, konvergiert die Matrix-Ricatti-Differenzgleichung erneut zu einem festen Wert

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^T (\mathbf{R} + \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T + \mathbf{Q}.$$

Diese Gleichung kann z.B. numerisch gelöst werden. [7, S. 187–193] Im Falle eines Luenberger-Beobachters wird die Rückführmatrix \mathbf{L}_k wieder aus einer Polplatzierung bestimmt.

Bei einem nichtlinearen System

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{d}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{n}_k\end{aligned}$$

ist das Extended Kalman-Filter analog

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \\ \hat{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k).\end{aligned}$$

Die Matrizen \mathbf{A}_k und \mathbf{C}_k für die Berechnung der Kalman-Verstärkung ergeben sich jetzt aus den Jacobi-Matrizen

$$\mathbf{A}_k = \left. \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_k = \left. \frac{d\mathbf{h}}{d\mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k}$$

und können demnach problemlos online berechnet werden. [1, S. 306–311] Die Anfangswerte werden dabei zu

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{E}(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{P}_0 &= \mathbf{E}(\Delta \mathbf{x}_0 \Delta \mathbf{x}_0^T) \\ \mathbf{K}_0 &= \mathbf{P}_0 \mathbf{C}_0^T (\mathbf{R} + \mathbf{C}_0 \mathbf{P}_0 \mathbf{C}_0^T)^{-1}\end{aligned}$$

gewählt. [7, S. 187–193]

3 Strukturvergleich

Der vorangegangene Abschnitt zeigte, dass sich Luenberger-Beobachter und stationärer Kalman-Filter lediglich im Wert der Rückführverstärkung unterscheiden. Nur bei einem nichtlinearen oder zeitvarianten System ergeben sich größere Unterschiede, da die Kalman-Verstärkung über die Matrix-Riccati-Differentialgleichung gebildet wird. Beim Luenberger-Beobachter würde sich dagegen der zeitvariable Rückführvektor aus einer Online-Polplatzierung ergeben.

4 Vergleich mit dem linearen, zeitinvarianten SISO-Testmodell der Gleichstromnebenschlussmaschine

4.1 Testmodell

4.1.1 Mathematische Beschreibung der Gleichstromnebenschlussmaschine

Als Testmodell dient die Gleichstromnebenschlussmaschine, dessen Blockschaltbild im Laplace-Bereich in Abb. 4.1 gezeigt ist: Im Anker führt die angelegte Umrichterspannung $U(t)$ abzüglich der induzierten Spannung $U_i(t)$ über den Ankerwiderstand R und der Ankerinduktivität L zum Stromfluss $I(t)$. Der magnetische Fluss soll dabei konstant auf dem Nennfluss $\Psi(t) = \Psi_n$ gehalten werden, sodass die Maschine nur im Ankerstellbereich betrieben wird. Über den Nennfluss und die Maschinenkonstanten c_M wird damit das Maschinendrehmoment $M_M(t)$ gebildet, dem die Störgröße, das unbekannte Lastmoment $M_L(t)$, entgegenwirkt. Über das Trägheitsmoment J wird die Maschine auf die Geschwindigkeit $\omega(t)$ beschleunigt. Über die EMK-Schleife (elektromotorische Kraft) wird schließlich die induzierte Spannung $U_i(t)$ gebildet.

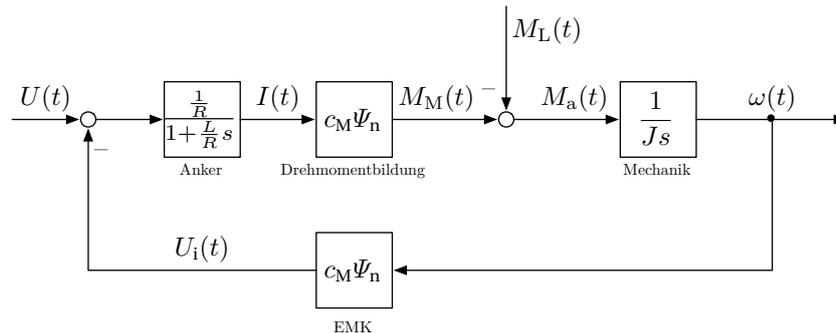


Abb. 4.1: Testmodell im Laplace-Bereich

Für eine Kaskadenregelung wird der Strom durch einen Stromsensor gemessen und dem Stromregler als Messwert zur Verfügung gestellt. Der Drehzahlregler soll allerdings seinen Messwert nicht aus einem Sensor, sondern aus einem Luenberger-Beobachter bzw. Kalman-Filter erhalten. Die Dynamik des Stromsensors soll hierbei vernachlässigt werden. Es soll keine Strommesswertglättung erfolgen. Weiterhin sei die Umrichterfrequenz so hoch, dass seine Zeitkonstante vernachlässigt werden kann und der Strom $I(t)$ und im Umkehrschluss auch $U(t)$ als glatt angenommen werden können.

4.1.2 Überführung des Testmodells in die Zustandsraumdarstellung

Das Laplace-Bereichs-Modell muss zunächst in den Zeitbereich und anschließend in den Zustandsraum (2.1) überführt werden. Mit dem Anker inklusive EMK ergibt sich für den Strom

die Zustandsgleichung

$$\begin{aligned}
I(s) &= \frac{\frac{1}{R}}{1 + \frac{L}{R}s} (U(s) - U_i(s)) \\
I(s) \cdot \left(1 + \frac{L}{R}s\right) &= \frac{1}{R}U(s) - \frac{c_M \Psi_n}{R} \omega(s) \\
I(s) + \frac{L}{R} \cdot sI(s) &= \frac{1}{R}U(s) - \frac{c_M \Psi_n}{R} \omega(s) \\
I(t) + \frac{L}{R} \cdot \dot{I}(t) &= \frac{1}{R}U(t) - \frac{c_M \Psi_n}{R} \omega(t) \\
\dot{I}(t) &= -\frac{R}{L}I(t) + \frac{1}{L}U(t) - \frac{c_M \Psi_n}{L} \omega(t). \tag{4.1}
\end{aligned}$$

Die Zustandsgleichung der Drehzahl ergibt sich mit der Drehmomentenbildung und der Mechanik zu

$$\begin{aligned}
\omega(s) &= \frac{1}{J_s} \cdot (M_M(s) - M_L(s)) \\
s\omega(s) &= \frac{1}{J} \cdot (M_M(s) - M_L(s)) \\
\dot{\omega}(t) &= \frac{1}{J} \cdot (M_M(t) - M_L(t)) \\
&= \frac{c_M \Psi_n}{J} I(t) - \frac{1}{J} M_L(t). \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Durch Einführung des Zustandsvektors

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix},$$

der Steuergröße

$$u(t) = U(t)$$

und der Störgröße

$$d(t) = M_L(t)$$

kann mit den Zustandsgleichungen (4.1) und (4.2) schließlich das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{I}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L}I(t) + \frac{1}{L}U(t) - \frac{c_M \Psi_n}{L}\omega(t) \\ \frac{c_M \Psi_n}{J}I(t) - \frac{1}{J}M_L(t) \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{c_M \Psi_n}{L} \\ \frac{c_M \Psi_n}{J} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}\mathbf{x}(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} I(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}u(t)} U(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_d d(t) = \mathbf{b}_d M_L(t)} M_L(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\
y(t) &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} I(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} = I(t) \tag{4.3}
\end{aligned}$$

aufgestellt werden.

4.1.3 Untersuchung des Testmodells

Für den hier fokussierten Beobachterentwurf ist die Überprüfung der Beobachtbarkeit erforderlich. Hierfür wird die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 & 0) \\ (1 & 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{J} & 0 \\ -\frac{R}{L} & -\frac{c_M \Psi_n}{L} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{R}{L} & \frac{c_M \Psi_n}{J} \end{pmatrix}$$

aufgestellt. Wie unschwer zu erkennen ist, sind die Zeilen linear voneinander unabhängig. Die Beobachtbarkeitsmatrix hat damit vollen Rang $n = 2$, wodurch das System vollständig beobachtbar ist.⁴

Weiterhin sind für die Auslegung des Luenberger-Beobachters die Eigenwerte des Systems von Interesse. Sie berechnen sich zu

$$\begin{aligned} 0 = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| &= \left| \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{c_M \Psi_n}{L} \\ \frac{c_M \Psi_n}{J} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} - \lambda & -\frac{c_M \Psi_n}{L} \\ \frac{c_M \Psi_n}{J} & -\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= \left(-\frac{R}{L} - \lambda \right) \cdot -\lambda + \frac{c_M \Psi_n}{J} \frac{c_M \Psi_n}{L} \\ &= \lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{c_M^2 \Psi_n^2}{JL} \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{c_M^2 \Psi_n^2}{JL}} \\ &= -\frac{R}{2L} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{c_M^2 \Psi_n^2 L}{JR^2}} \right). \end{aligned}$$

Der Realteil ist in jeden Fall < 0 , da $R, L > 0$. Damit ist das System wie erwartet stabil.

Auf die Überprüfung der Steuerbarkeit wird verzichtet, da die Eigenschaft für den Beobachter-Entwurf ohnehin nicht relevant ist und da es offensichtlich ist, dass die Drehzahl $\omega(t)$ durch die Spannung $U(t)$ gesteuert werden kann.

4.1.4 Erweiterung des Zustandsraummodells um das Störgrößenmodell für sprungförmige Störungen M_L

Würde nun ein Luenberger-Beobachter oder Kalman-Filter entworfen werden, würde er, aus den in Abschnitt 2.4 auf S. 7 genannten Gründen, bei Beaufschlagung von zu erwartenden stationären bzw. sprungförmigen Störungen des Lastmoments M_L , nicht mehr stationär genau arbeiten und kann damit unbrauchbar sein. Daher soll auch die Störgröße Lastmoment M_L , dessen Störgrößenmodell

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_d(t) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_d(0) = \mathbf{d}_\infty \\ \mathbf{y}_d(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} M_{L,\infty} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_d} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ M_L(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_d(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_d} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ M_{L,\infty} \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_\infty} \end{aligned}$$

⁴Es sei angemerkt, dass das System nur aufgrund der Rückkopplung über die EMK vollständig beobachtbar ist. Wäre die EMK nicht vorhanden, würde eine reine IT1-Strecke vorliegen und die Drehzahl $\omega(t)$ wäre nicht beobachtbar, da sie dann bildlich gesehen keine Auswirkungen auf den Strom $I(t)$ hätte.

lautet, im Gesamtmodell mit berücksichtigt werden. Das Zustandsraummodell (4.3) erweitert sich nach Gl. (2.8) zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{I}(t) \\ \dot{\omega}(t) \\ 0 \\ \dot{M}_L(t) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_d(t) \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} -\frac{R}{L} & -\frac{c_M \Psi_n}{L} & 0 & 0 \\ \frac{c_M \Psi_n}{J} & 0 & 0 & -\frac{1}{J} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} I(t) \\ \omega(t) \\ 0 \\ M_L(t) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_d(t) \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} u(t)} U(t)$$

$$y(t) = \underbrace{(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)}_{\begin{pmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} I(t) \\ \omega(t) \\ 0 \\ M_L(t) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_d(t) \end{pmatrix}} = I(t).$$

Da jeweils die 3. Zeile und die 3. Spalte nur Nullen enthält, können sie gestrichen werden. Damit ist das erweiterte Zustandsraummodell des Testmodells

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{I}(t) \\ \dot{\omega}(t) \\ \dot{M}_L(t) \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_s(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{c_M \Psi_n}{L} & 0 \\ \frac{c_M \Psi_n}{J} & 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_s} \underbrace{\begin{pmatrix} I(t) \\ \omega(t) \\ M_L(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_s(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_{su}(t)} U(t)$$

$$y(t) = \underbrace{(1 \quad 0 \quad 0)}_{\mathbf{c}_s^T} \underbrace{\begin{pmatrix} I(t) \\ \omega(t) \\ M_L(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_s(t)} = I(t).$$

4.1.5 Untersuchung des erweiterten Testmodells

Erneut muss die Beobachtbarkeit für das Paar $(\mathbf{A}_s, \mathbf{c}_s^T)$ untersucht werden. Hierfür wird die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_{B,S} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_S^T \\ \mathbf{c}_S^T \mathbf{A}_S \\ \mathbf{c}_S^T \mathbf{A}_S^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \quad 0 \quad 0) \\ (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{c_M \Psi_n}{L} & 0 \\ \frac{c_M \Psi_n}{J} & 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{c_M \Psi_n}{L} & 0 \\ \frac{c_M \Psi_n}{J} & 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{R}{L} & -\frac{c_M \Psi_n}{L} & 0 \\ -\frac{R^2}{L^2} - \frac{c_M^2 \Psi_n^2}{JL} & \frac{R c_M \Psi_n}{L^2} & \frac{c_M \Psi_n}{JL} \end{pmatrix}$$

berechnet, die erneut vollen Rang hat. Das System $(\mathbf{A}_s, \mathbf{c}_s^T)$ ist also beobachtbar.

Da weder das System $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$ noch das Störgrößenmodell $(\mathbf{A}_d, \mathbf{C}_d)$ angerührt, sondern lediglich zusammengeschrieben wurden, ergeben sich die Eigenwerte von \mathbf{A}_s aus den einzelnen Eigenwerten von \mathbf{A} und \mathbf{A}_d . Mit Berücksichtigung, dass die 3. Zeile und die 3. Spalte gestrichen wurden, ergibt sich der 3. Eigenwert zu

$$\lambda_3 = 0,$$

was auf den ersten Blick ein grenzstabiles System suggeriert. Das kommt aber nur von der Tatsache, dass stabiles Systemmodell und grenzstabiles Störgrößenmodell zusammengeschrieben wurden.

Aufgrund des erfreulichen Ergebnisses der Beobachtbarkeit des erweiterten Systems würde man nun nur noch mit diesem System weiterarbeiten. Es soll hier dennoch zunächst auch das Originalsystem betrachtet werden, als ob das erweiterte System nicht beobachtbar wäre und man auf das Originalsystem angewiesen wäre.

4.1.6 Entwurf des Luenberger-Beobachters durch Polvorgabe

Die Eigenwerte der Beobachtungsfehlermatrix des Originalsystems $\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$ berechnen sich zu

$$\begin{aligned}
0 &= \det((\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) - \lambda\mathbf{E}) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{c_M\Psi_n}{L} \\ \frac{c_M\Psi_n}{J} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 0) - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{c_M\Psi_n}{L} \\ \frac{c_M\Psi_n}{J} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} - l_1 - \lambda & -\frac{c_M\Psi_n}{L} \\ \frac{c_M\Psi_n}{J} - l_2 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= \left(-\frac{R}{L} - l_1 - \lambda\right) \cdot -\lambda - \left(\frac{c_M\Psi_n}{J} - l_2\right) \cdot -\frac{c_M\Psi_n}{L} \\
&= \lambda^2 + \left(\frac{R}{L} + l_1\right)\lambda + \frac{c_M^2\Psi_n^2}{JL} - \frac{l_2 c_M\Psi_n}{L} \\
\Rightarrow \lambda_{1,2}^B &= -\frac{\frac{R}{L} + l_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{R}{L} + l_1\right)^2}{4} + \frac{l_2 c_M\Psi_n}{L} - \frac{c_M^2\Psi_n^2}{JL}} \\
&= -\frac{\frac{R}{L} + l_1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{\left(\frac{R}{L} + l_1\right)^2} \left(\frac{l_2 c_M\Psi_n}{L} - \frac{c_M^2\Psi_n^2}{JL}\right)}\right). \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte bzw. Pole der Beobachtungsfehlermatrix $\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$ sollen um das k -fache weiter links als bei der Systemmatrix \mathbf{A} , also bei

$$\lambda_{1,2}^B := k\lambda_{1,2} = -k\frac{R}{2L} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{c_M^2\Psi_n^2 L}{JR^2}}\right) \tag{4.5}$$

platziert werden. Ein Koeffizientenvergleich zwischen Gl. (4.4) und (4.5),

$$\begin{aligned}
-\frac{\frac{R}{L} + l_1}{2} &= -k\frac{R}{2L} \\
-\frac{R}{L} - l_1 &= -k\frac{R}{L} \\
l_1 &= k\frac{R}{L} - \frac{R}{L} = (k-1)\frac{R}{L}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\left(\frac{R}{L} + l_1\right)^2} \left(\frac{l_2 c_M \Psi_n}{L} - \frac{c_M^2 \Psi_n^2}{JL} \right) &= -4 \frac{c_M^2 \Psi_n^2 L}{JR^2} \\
\frac{l_2 c_M \Psi_n}{L} - \frac{c_M^2 \Psi_n^2}{JL} &= -\frac{c_M^2 \Psi_n^2 L}{JR^2} \left(\frac{R}{L} + l_1 \right)^2 \\
\frac{l_2 c_M \Psi_n}{L} &= -\frac{c_M^2 \Psi_n^2 L}{JR^2} \left(\frac{R}{L} + (k-1) \frac{R}{L} \right)^2 + \frac{c_M^2 \Psi_n^2}{JL} \\
l_2 &= -\frac{c_M \Psi_n L^2}{JR^2} \cdot k^2 \frac{R^2}{L^2} + \frac{c_M \Psi_n}{J} \\
l_2 &= -(k^2 - 1) \frac{c_M \Psi_n}{J}
\end{aligned}$$

liefert schließlich den Rückführvektor zu

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k-1) \frac{R}{L} \\ -(k^2 - 1) \frac{c_M \Psi_n}{J} \end{pmatrix}.$$

Da zunächst ein mittleres Messrauschen angenommen wird, werden die Eigenwerte bzw. Pole der Beobachtungsfehlermatrix $\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$ beim $k = 4$ -fachen Wert der Systemmatrix platziert,

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \frac{R}{L} \\ -15 \frac{c_M \Psi_n}{J} \end{pmatrix}.$$

4.1.7 Entwurf des Störgrößen-Luenberger-Beobachters durch Polvorgabe

Da das erweiterte System die gleichen Eigenwerte $\lambda_{1,2,S} := \lambda_{1,2}$ hat, werden auch die Eigenwerte der Beobachtungsfehlermatrix bei $\lambda_{1,2,S}^B = \lambda_{1,2}^B$ platziert. Der 3. Eigenwert von \mathbf{A}_S liegt allerdings bei

$$\lambda_{3,S} = 0.$$

Eine Platzierung des 3. Eigenwerts der Beobachtungsfehlermatrix $\mathbf{A}_S - \mathbf{l}_S \mathbf{c}_S^T$ bei

$$\lambda_{3,S}^B := k \lambda_{3,S} = 0$$

ist nicht sinnvoll, da Anfangswerte $M_L(0) \neq 0$ dann nicht abklingen würden und auch der 3. Zustand $M_L(t)$ nicht stationär genau, d.h. gar nicht, beobachtet werden könnte.

Wie auch die Simulationen unten bestätigen werden, beeinflusst $\lambda_{3,S}^B$ praktisch nur das Abklingen der stationären Abweichung des kompletten Zustandsvektors,

$$\Delta \mathbf{x}_\infty(t) = \hat{\mathbf{x}}_\infty(t) - \mathbf{x}_\infty(t) = \begin{pmatrix} I_\infty(t) - \hat{I}_\infty(t) \\ \omega_\infty(t) - \hat{\omega}_\infty(t) \\ M_{L,\infty}(t) - \hat{M}_{L,\infty}(t) \end{pmatrix},$$

die durch sprungförmige Störung des Lastmoments ausgelöst wurden. Aus diesem Grund kann $\lambda_{3,S}^B$ auch losgelöst von den anderen beiden Eigenwerten $\lambda_{1,2,S}^B$, beispielsweise deutlich weiter rechts (aber kleiner 0) platziert werden, wenn das Messrauschen ansonsten zu sehr verstärkt würde – aber ein schnelles Abklingen gelingt natürlich dann, wenn $\lambda_{3,S}^B$ möglichst weit links platziert wird. Idealerweise sollte $\lambda_{3,S}^B$ mindestens so groß wie der am weitesten rechts liegende Eigenwert $\min_{\Re}(\lambda_{1,S}^B, \lambda_{2,S}^B)$ gewählt werden, damit das Erreichen der stationären Genauigkeit mindestens

genau so schnell wie das Abklingen sonstiger impulsförmiger Störungen auf die ersten beiden Zustände, $I(t)$ und $\omega(t)$, geschieht,

$$\lambda_{3,S}^B := \lambda_2^B = -k \frac{R}{2L} \left(1 + \sqrt{1 - 4 \frac{c_M^2 \Psi_n^2 L}{JR^2}} \right).$$

Auf eine analytische Berechnung des Rückführvektors \mathbf{l}_S sei an dieser Stelle verzichtet, da er mithilfe von MATLAB mit der Funktion

$$\begin{aligned} \lambda_S &= k \operatorname{eig}(\mathbf{A}_S) \\ \mathbf{l}_S &= \operatorname{place} \left(\mathbf{A}_S^T, \mathbf{c}_S^T, \lambda_S + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_{2,S} \end{pmatrix} \right)^T \end{aligned}$$

unkompliziert berechnet werden kann, wobei wieder wie oben $k = 4$ angesetzt wird. Allerdings zeigt sich, dass die Funktion `place`, die die Berechnung von \mathbf{l}_S numerisch durchführt, bei dieser Konstellation nicht konvergiert. Daher wird der 3. Eigenwert schlussendlich bei $\lambda_3^B := 1,01\lambda_2^B$ platziert,

$$\begin{aligned} \lambda_S &= 4 \operatorname{eig}(\mathbf{A}_S) \\ \mathbf{l}_S &= \operatorname{place} \left(\mathbf{A}_S^T, \mathbf{c}_S, \lambda_S + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,01\lambda_{2,S} \end{pmatrix} \right)^T. \end{aligned}$$

4.1.8 Entwurf des Kalman-Filters und des Störgrößen-Kalman-Filters

Da das System linear und zeitinvariant ist, kann anstelle eines Extended Kalman-Filters ein stationärer Kalman-Filter mit konstanter Kalman-Verstärkung entworfen werden. Mithilfe einer MATLAB-Funktion kann die Matrix-Riccati-Gleichung (2.12) gelöst werden und die optimale Kalman-Verstärkung zu

$$\mathbf{k} = \operatorname{lqe}(\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{c}^T, \mathbf{Q}, R)^T.$$

bzw.

$$\mathbf{k}_S = \operatorname{lqe}(\mathbf{A}_S, \mathbf{E}, \mathbf{c}_S^T, \mathbf{Q}_S, R)^T.$$

berechnet werden. System- und Messrauschen werden dabei mit einer Varianz von σ_i^2 in den Matrizen

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Q}_S = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

und

$$R = \sigma_4^2 = 10$$

modelliert.

Alternativ könnte die Kalman-Verstärkung auch mit Gl. (2.11)

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}$$

und der Matrix-Riccati-Differentialgleichung (2.10)

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} - \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbb{E}(\Delta\mathbf{x}(0)\Delta\mathbf{x}^T(0)),$$

in MATLAB/Simulink ähnlich dem Blockschaltbild in Abb. 4.2 modelliert und dadurch berechnet werden.

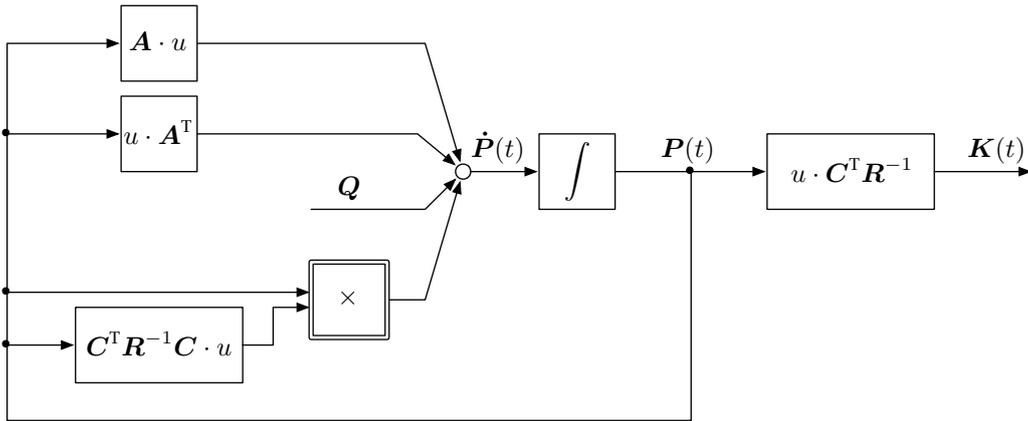


Abb. 4.2: Blockschaltbild zur Bestimmung der Kalman-Verstärkung

4.2 Vergleich im Frequenzbereich

Ein aussagekräftiger Vergleich ist im Frequenzbereich hier nicht möglich, da die Struktur von Luenberger-Beobachter und stationären Kalman-Filter mit konstanter Kalman-Verstärkung identisch ist. Außerdem wird die Filterwirkung des Kalman-Filters, der das weiße Rauschen des geschätzten Zustandsvektors – das *alle* Frequenzen enthält – minimiert, nur im Zeitbereich deutlich. Lediglich die Zeitkonstanten des Beobachtungsfehlers sowie der stationäre Beobachtungsfehler bei konstanten Störungen sind durch die unterschiedliche Rückführverstärkung bei Luenberger-Beobachter und Kalman-Filter unterschiedlich. Diese beiden Sachverhalten lassen sich aber auch im Zeitbereich aussagekräftig vergleichen.

4.3 Vergleich im Zeitbereich

4.3.1 Simulink-Modell und Parametrierung

In Abb. 4.3 ist ein Screenshot des Simulink-Modells gezeigt. Hierin ist das reale System im Laplace-Bereich modelliert. Luenberger-Beobachter und Kalman-Filter sowie Störgrößen-Luenberger-Beobachter und Störgrößen-Kalman-Filter arbeiten parallel. Für eine spätere Beurteilung wurde auch ein einfaches PT1-Filter mit der Zeitkonstante $T = 10$ ms jeweils an die Luenberger-Beobachter angeschlossen. In Scopes und MATLAB-Variablen werden die relevanten Simulationsergebnisse zum jeweiligen Vergleich erfasst.

Für die Simulation wurden Parameter einer fiktiven Maschine verwendet. Sie habe eine Leistung von $P_n = 33$ kW bei $M_n = 100$ Nm und $n_n = 330$ rad/s mit den elektrischen Ankergrößen $U_{An} = 400$ V und $I_{An} = 90$ A. Der Ankerwiderstand sei demnach etwa $R = 0,3$ Ω und die Maschinenkonstante mal Flussverkettung $c_M \Psi_n = 1,13$ Vs. Die Ankerzeitkonstante läge bei $T = 10$ ms wodurch die Ankerinduktivität $L = 3$ mH betrage. Schließlich sei die Trägheit $J = 0,2$ kgm².

Die Simulationsdauer beträgt 3 s. Beispielhaft dienen die in Abb. 4.4 dargestellten Stell- und Störgrößensignale, die sich jeweils aus einem Sprung und später einer Sinusschwingung zusammensetzen. Die Signale sind so gewählt, dass in der ersten Simulationshälfte nur die Stellgröße verändert wird und damit das Stell- bzw. Führungsverhalten untersucht werden kann. In der zweiten Hälfte wird hingegen nur die Störgröße verändert wodurch das Störverhalten isoliert betrachtet werden kann.

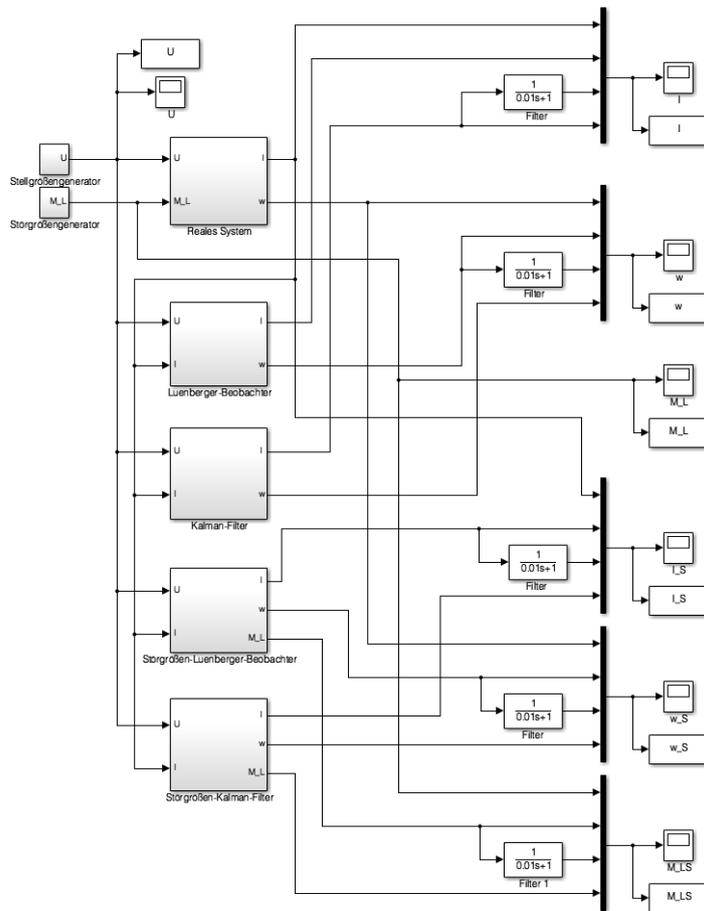


Abb. 4.3: Screenshot des Simulink-Modells

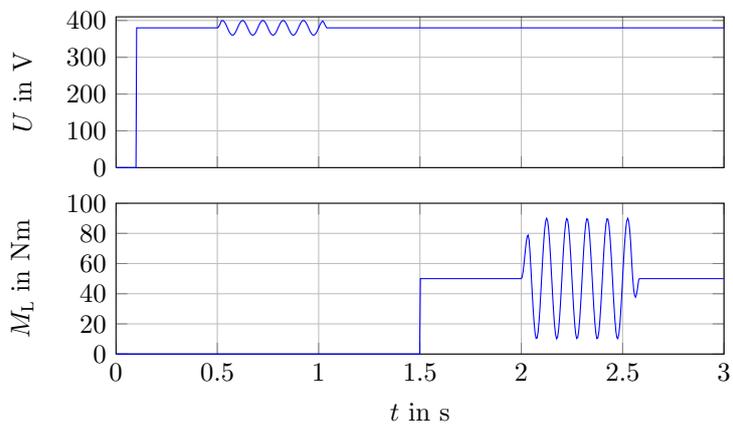


Abb. 4.4: Stell- und Störgrößensignale für alle Simulationen

4.3.2 Stell- und Störverhalten von einfachen Luenberger-Beobachter und einfachen Kalman-Filter

Zunächst werden der einfache Luenberger-Beobachter und der einfache Kalman-Filter betrachtet. Es sollen 3 Fälle verglichen werden:

- (a) Zuerst wird die oben bereits verwendete Kombination $k = 4$ für die Polplatzierung des Luenberger-Beobachters und Messrauschen mit $\sigma_4^2 = 10$, was auch in die Berechnung der Kalman-Verstärkung eingeht, verwendet. Hierfür berechnet sich die Rückführverstärkung des Luenberger-Beobachters zu

$$\mathbf{l}_{k=4} = (300, 00 \quad -84, 75)^T.$$

Die Kalman-Verstärkung konvergiert dagegen zu

$$\mathbf{k}_{\sigma_4^2=10} = (7, 8022 \quad -0, 8248)^T.$$

- (b) Anschließend wird der Effekt der Polverschiebung der Beobachtungsfehlermatrix des Luenberger-Beobachters um das Doppelte, $k = 8$, bei gleichem Messrauschen $\sigma_4^2 = 10$ untersucht. Die Rückführverstärkung beträgt dann

$$\mathbf{l}_{k=8} = (700, 00 \quad -355, 95)^T.$$

- (c) Schließlich wird die Auswirkung der Vergrößerung des Messrauschens auf $\sigma_4^2 = 100$ bei der ausganglichen Polplatzierung des Luenberger-Beobachters mit $k = 4$ betrachtet. Hierbei beträgt die Kalman-Verstärkung nur noch

$$\mathbf{k}_{\sigma_4^2=100} = (0, 8273 \quad -0, 0878)^T.$$

In Abb. 4.5 und 4.6 sind die Simulationsergebnisse für die 3 Fälle gezeigt. Hierbei wurde die Ordinate bereits auf den interessanten Bereich herangezoomt, sodass nur ein Teil des Anlaufverhaltens zu sehen ist. Da das verwendete Modell, das für den Entwurf von Luenberger-Beobachter und Kalman-Filter, exakt mit dem realen System übereinstimmt, ist das Stellverhalten von Luenberger-Beobachter und Kalman-Filter auch im nicht dargestellten Bereich *exakt*. Unterschiede ergeben sich nur beim Rauschen und beim Störverhalten:

- (a) Wie die *deutlich* kleinere Kalman-Verstärkung vermuten ließ, ist zwar das Rauschen in der Beobachtungsgröße auch deutlich kleiner, aber der stationäre Fehler ist unverhältnismäßig größer.
- (b) Durch die Erhöhung der Rückführverstärkung konnte nun zwar der stationäre Beobachtungsfehler nochmals verringert werden, aber, wie erwartet, ist das Rauschen größer.
- (c) Da bei einer Erhöhung des Messrauschens die Kalman-Verstärkung noch kleiner wird, ist zwar das Rauschen ähnlich klein, der stationäre Fehler aber noch größer.

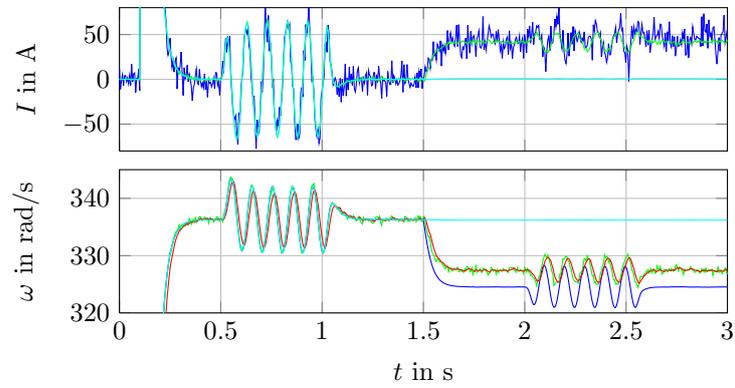
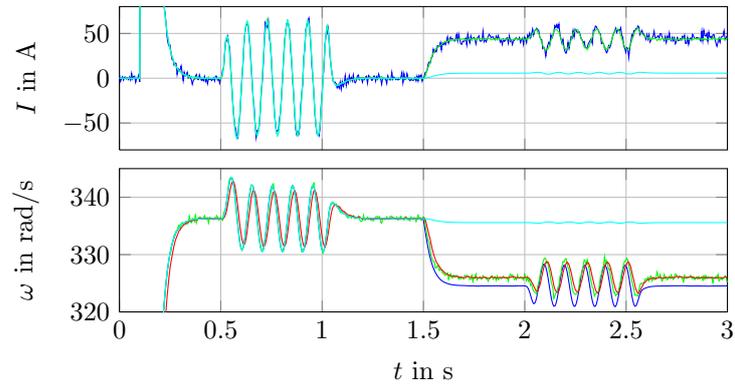
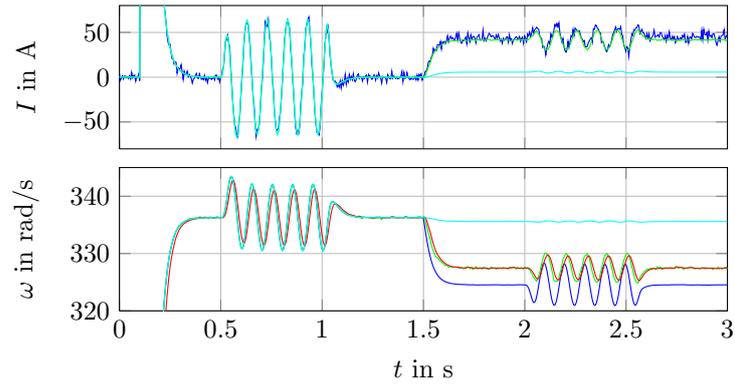
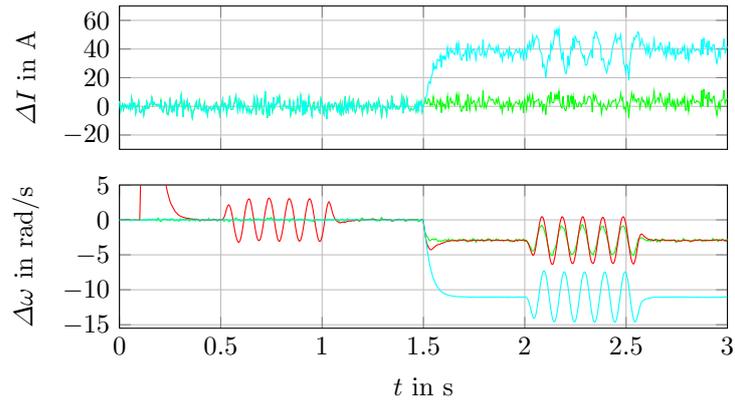
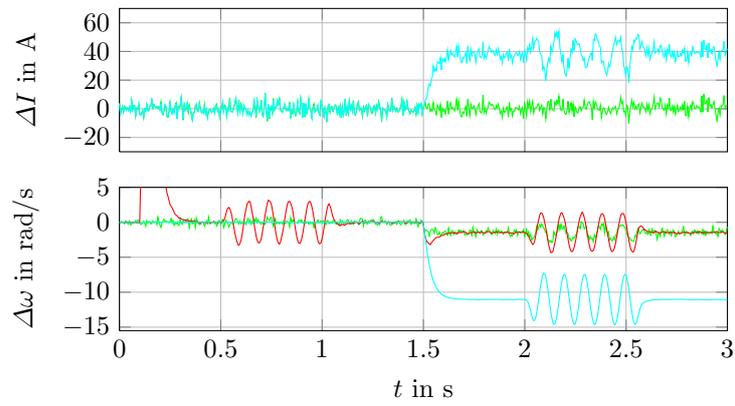


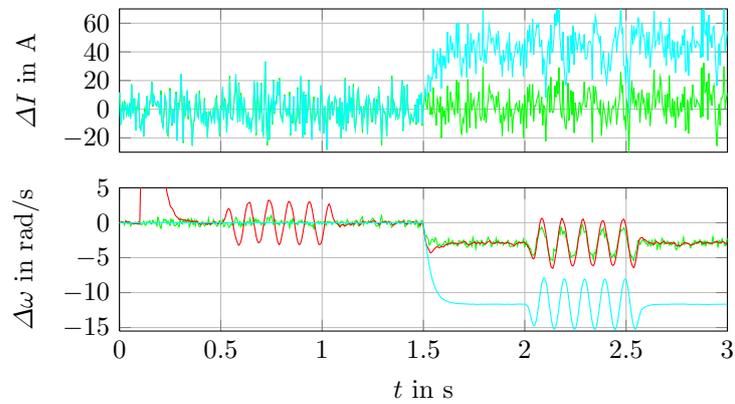
Abb. 4.5: Stell- und Störverhalten von einfachen Luenberger-Beobachter und einfachen Kalman-Filter, Absolutwerte x_i (blau: Zeitverläufe des realen Systems, grün: Beobachtungswerte des Luenberger-Beobachters, rot: durch das Filter geglättete Beobachtungswerte des Luenberger-Beobachters, cyan: Schätzwerte des Kalman-Filters)



(a) $k = 4, \sigma_4^2 = 10$



(b) $k = 8, \sigma_4^2 = 10$



(c) $k = 4, \sigma_4^2 = 100$

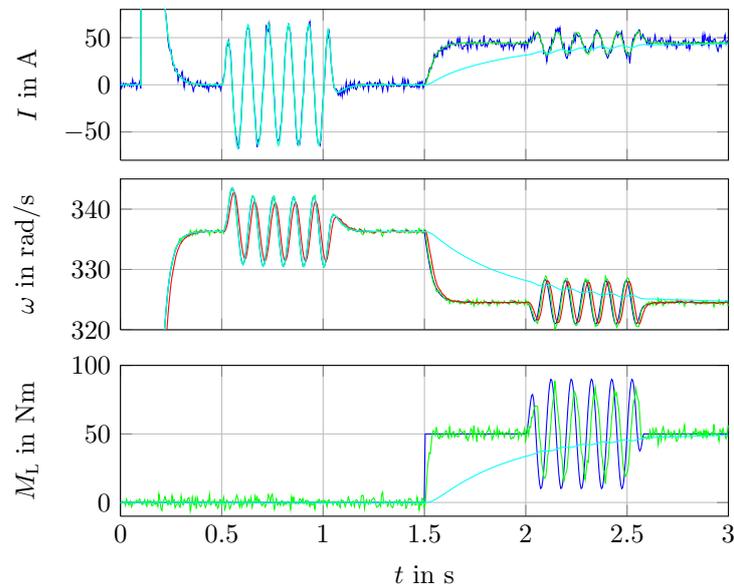
Abb. 4.6: Stell- und Störverhalten von einfachen Luenberger-Beobachter und einfachen Kalman-Filter, Fehler $\Delta x_i = x_i - \hat{x}_i$ (blau: Zeitverläufe des realen Systems, grün: Beobachtungswerte des Luenberger-Beobachters, rot: durch das Filter geglättete Beobachtungswerte des Luenberger-Beobachters, cyan: Schätzwerte des Kalman-Filters)

4.3.3 Stell- und Störverhalten von Störgrößen-Luenberger-Beobachter und Störgrößen-Kalman-Filter

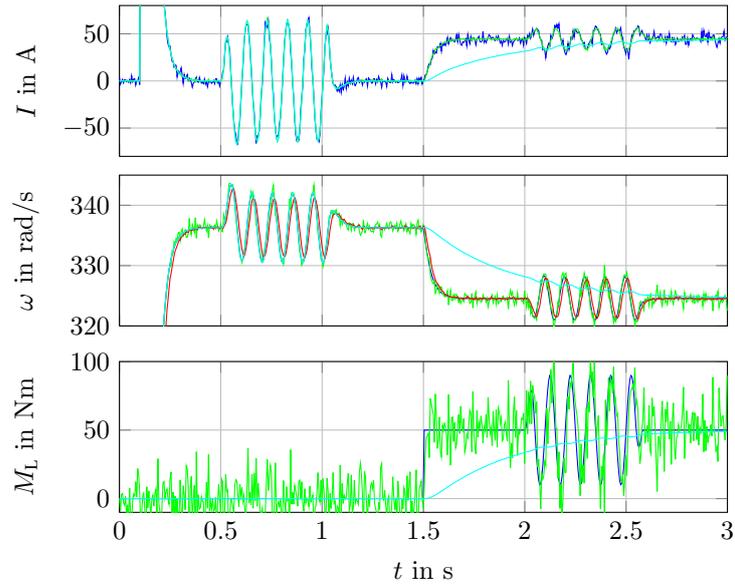
Nun werden Stell- und Störverhalten von Störgrößen-Luenberger-Beobachter und Störgrößen-Kalman-Filter in den gleichen 3 Fällen wie im vorigen Abschnitt verglichen. Hierfür ergeben sich die Rückführ- und Kalman-Verstärkungen zu

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{s,k=4} &= (424, 10 \quad -216, 53 \quad 2243, 67)^T \\ \mathbf{l}_{s,k=8} &= (948, 19 \quad -883, 09 \quad 17949, 36)^T \\ \mathbf{k}_{s,\sigma_4^2=10} &= (10, 15 \quad -1, 50 \quad 10, 15)^T \\ \mathbf{k}_{s,\sigma_4^2=100} &= (1, 69 \quad -0, 32 \quad 1, 00)^T. \end{aligned}$$

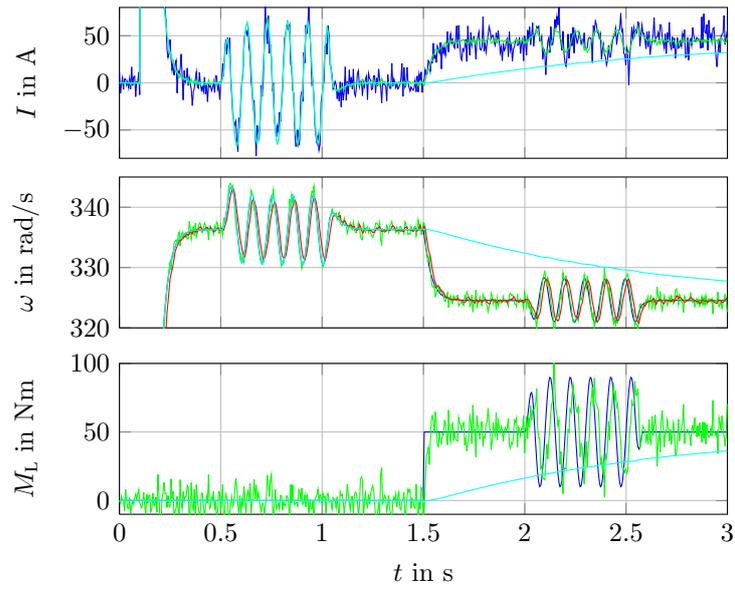
In Abb. 4.7 und 4.8 sind die Simulationsergebnisse auf gleiche Weise wie oben gezeigt. Unterschiede im Stellverhalten ergeben sich erneut nur durch das Rauschen. Wie erwartet klingen nun Abweichungen durch stationäre Störungen ab. Durch die jeweils im Vergleich zur Rückführverstärkung des Luenberger-Beobachters sehr kleine Kalman-Verstärkung ist zwar erneut kaum Rauschen beim Kalman-Filter vorhanden, aber die stationäre Abweichung aller Zustände klingt *deutlich* langsamer ab.



(a) $k = 4, \sigma_4^2 = 10$

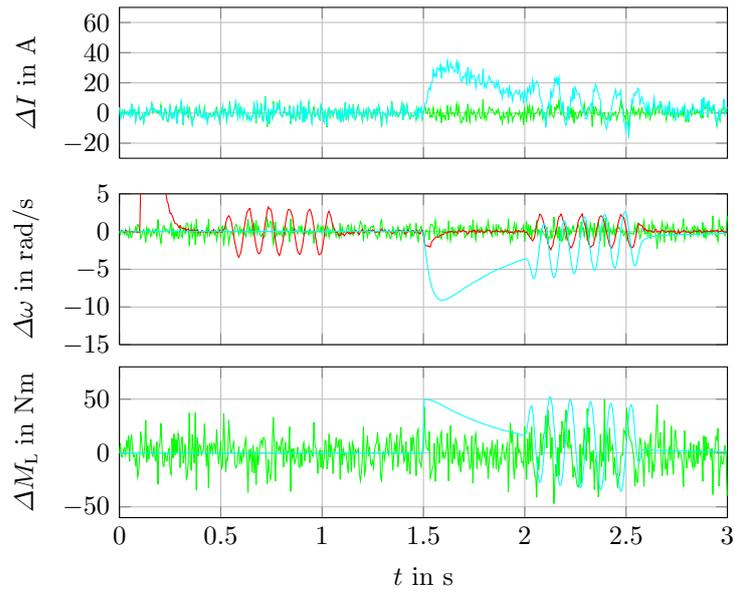
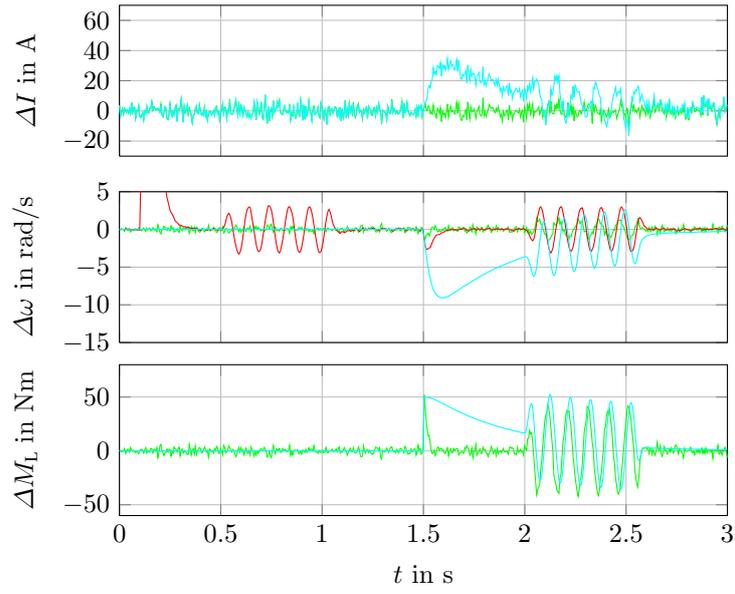


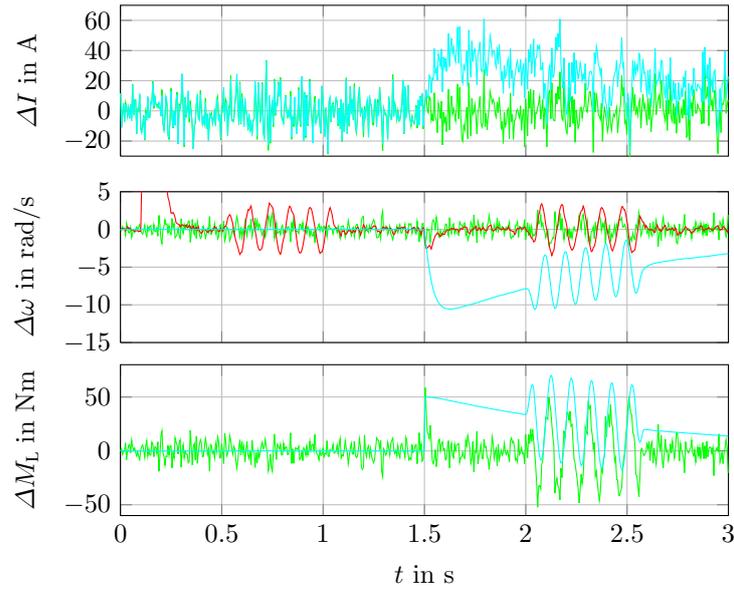
(b) $k = 8, \sigma_4^2 = 10$



(c) $k = 4, \sigma_4^2 = 100$

Abb. 4.7: Stell- und Störverhalten von Störgrößen-Luenberger-Beobachter und Störgrößen-Kalman-Filter, Absolutwerte x_i (blau: Zeitverläufe des realen Systems, grün: Beobachtungswerte des Luenberger-Beobachters, rot: durch das Filter geglättete Beobachtungswerte des Luenberger-Beobachters, cyan: Schätzwerte des Kalman-Filters)





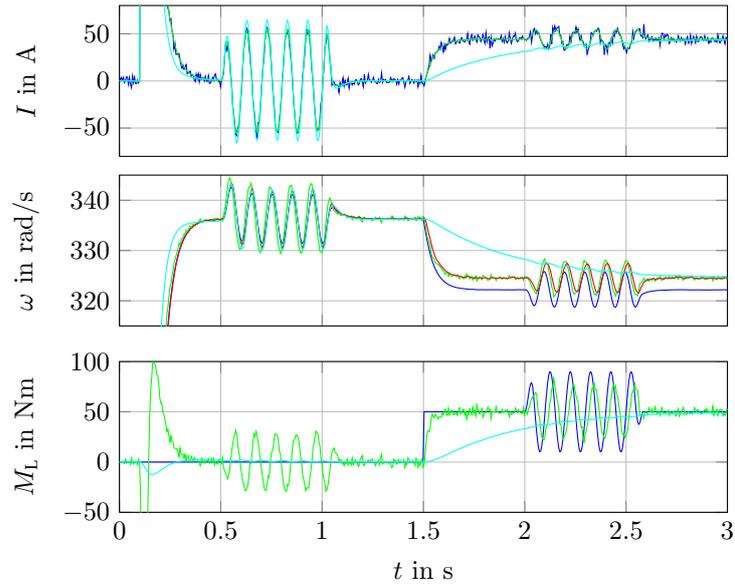
(c) $k = 4$, $\sigma_4^2 = 100$

Abb. 4.8: Stell- und Störverhalten von Störgrößen-Luenberger-Beobachter und Störgrößen-Kalman-Filter, Fehler $\Delta x_i = x_i - \hat{x}_i$ (blau: Zeitverläufe des realen Systems, grün: Beobachtungswerte des Luenberger-Beobachters, rot: durch das Filter geglättete Beobachtungswerte des Luenberger-Beobachters, cyan: Schätzwerte des Kalman-Filters)

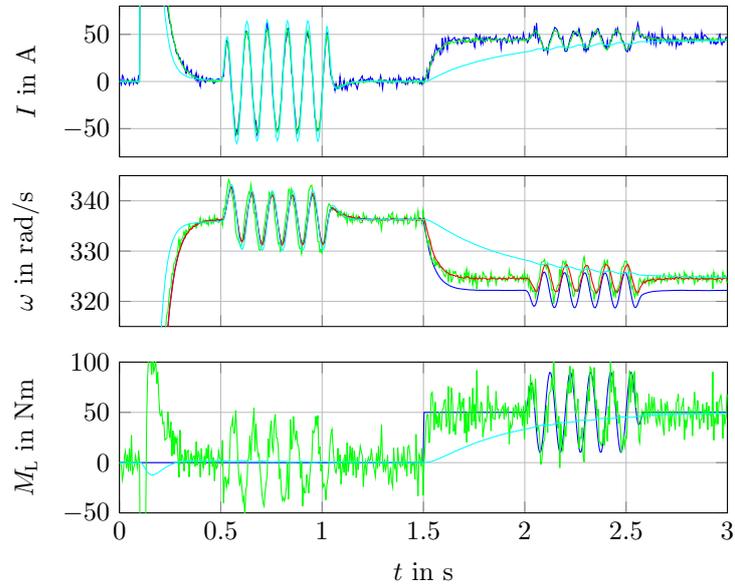
4.3.4 Stell- und Störverhalten von Störgrößen-Luenberger-Beobachter und Störgrößen-Kalman-Filter bei Parameteränderungen

Bisher wurde davon ausgegangen, dass das dem Luenberger-Beobachter und Kalman-Filter zugrundegelegte Modell exakt mit dem realen Modell übereinstimmt. Es soll daher schließlich noch durch eine Simulation das Verhalten bei einer Parameteränderung des realen Systems im Vergleich zum Störgrößen-Luenberger-Beobachter und Störgrößen-Kalman-Filter für die ersten beiden Fälle (a) und (b), also mit $k = 4$ und $k = 8$ jeweils bei $\sigma_4^2 = 10$, untersucht werden.

Bei der Gleichstromnebenschlussmaschine kann sich insbesondere der Ankerwiderstand R in einem relativ großen Bereich z.B. durch Temperaturerhöhung verändern. Abb. 4.9 und 4.10 zeigen die Simulationsergebnisse bei $R' = 1, 2R$. Hierbei ergeben sich sowohl im Stell- als auch im Störverhalten sehr große stationäre und dynamische Fehler insbesondere bei der beobachteten bzw. geschätzten Drehzahl. Die Genauigkeit wird kaum, *praktisch gar nicht*, durch eine Erhöhung der Rückführverstärkung mit $k = 4$ auf $k = 8$ verbessert. Daher sollte bei zu erwartenden Parameteränderungen nach Möglichkeit auch Luenberger-Beobachter bzw. Kalman-Filter entsprechend adaptiv angepasst werden.

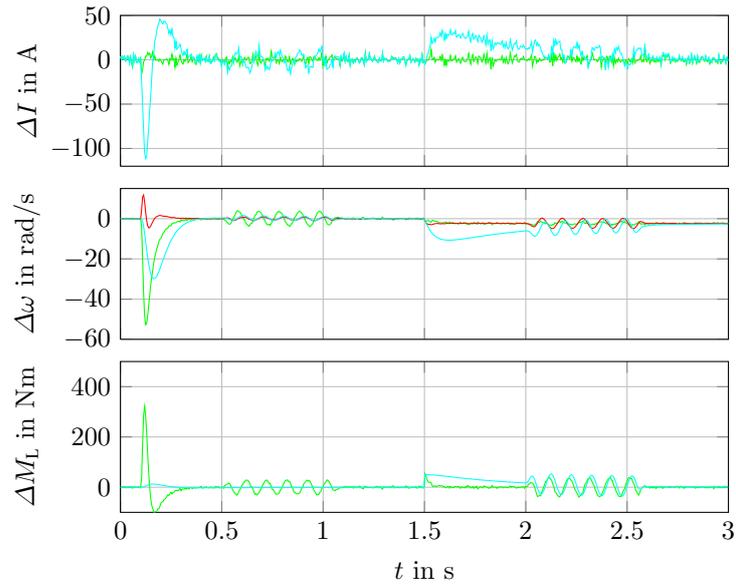


(a) $k = 4, \sigma_4^2 = 10$

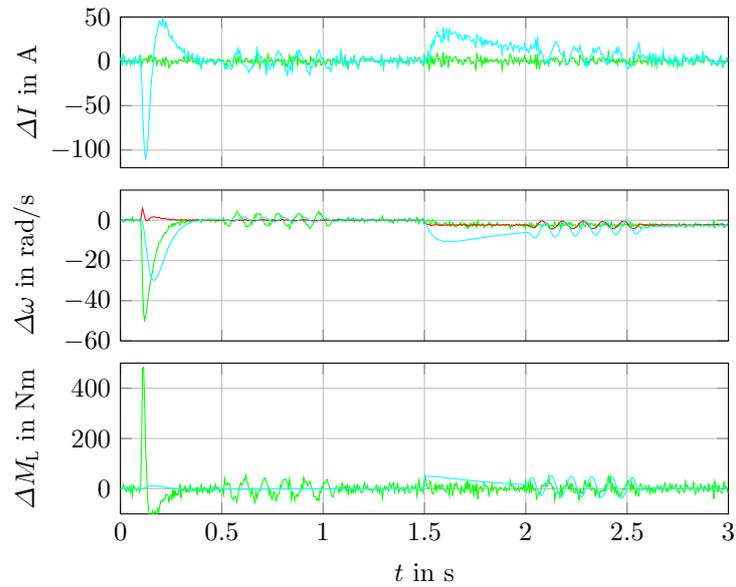


(b) $k = 8, \sigma_4^2 = 10$

Abb. 4.9: Stell- und Störverhalten von Störgrößen-Luenberger-Beobachter und Störgrößen-Kalman-Filter bei Parameteränderung $R' = 1,2R$, Absolutwerte x_i (blau: Zeitverläufe des realen Systems, grün: Beobachtungswerte des Luenberger-Beobachters, rot: durch das Filter geglättete Beobachtungswerte des Luenberger-Beobachters, cyan: Schätzwerte des Kalman-Filters)



(a) $k = 4, \sigma_4^2 = 10$



(b) $k = 8, \sigma_4^2 = 10$

Abb. 4.10: Stell- und Störverhalten von Störgrößen-Luenberger-Beobachter und Störgrößen-Kalman-Filter bei Parameteränderung $R' = 1, 2R$, Fehler $\Delta x_i = x_i - \hat{x}_i$ (blau: Zeitverläufe des realen Systems, grün: Beobachtungswerte des Luenberger-Beobachters, rot: durch das Filter geglättete Beobachtungswerte des Luenberger-Beobachters, cyan: Schätzwerte des Kalman-Filters)

5 Resümee

Luenberger-Beobachter und stationäres Kalman-Filter haben die identische Struktur. Lediglich der Wert des Rückführvektors wird nach unterschiedlichen Gesichtspunkten berechnet: Der Vorteil vom Luenberger-Beobachter ist, dass eine Polplatzierung vorgenommen und damit seine Fehlerdynamik vorgegeben wird. Nachteilig ist, dass das Rauschen nicht mit in die Auslegung einfließt wodurch Simulationen und Messungen zur Bestätigung herangezogen werden müssen. Genau umgekehrt ist es beim Kalman-Filter: Hier wird bei der Auslegung die stochastische Beschreibung des Rauschens verwendet. Dadurch können aber keine Dynamik-Anforderungen mit in die Auslegung einfließen. Daher müssen auch hier Simulationen und Messungen zur Bestätigung der Auslegung herangezogen werden. Ob die Wahl auf Luenberger-Beobachter oder Kalman-Filter fallen sollte, ist damit auch stark von dem Anwendungsproblem abhängig.

Die Wahl bei dem fiktiven Modell der Gleichstromnebenschlussmaschine würde, da eine gute Stördynamik gefordert wird, auf den Störgrößen-Luenberger-Beobachter fallen. Ist das Rauschen damit noch zu groß, ist ein nachgeschaltetes PT1-Filter, das hier mit der relativ kleinen Zeitkonstante von $T = 10 \text{ ms}$ parametrisiert wurde, evtl. ausreichend – allerdings erzeugt ein solches Filter eine Phasenverschiebung und damit einen relativ großen dynamischen Fehler, wie Abb. 4.6 und 4.8 zeigen.

Auffällig in Abb. 4.5 und 4.7 ist, dass der Luenberger-Beobachter auch den Stromverlauf nahezu dynamisch exakt und unverrauscht beobachtet, ihn sozusagen *Luenberger-filtert*. Daher ist es vermutlich sinnvoll, diesen beobachteten Wert dem Stromregler als Messwert zuzuführen, statt den tatsächlichen Messwert für den Stromregler mit der einhergehenden Phasenverschiebung zu glätten.

Literatur

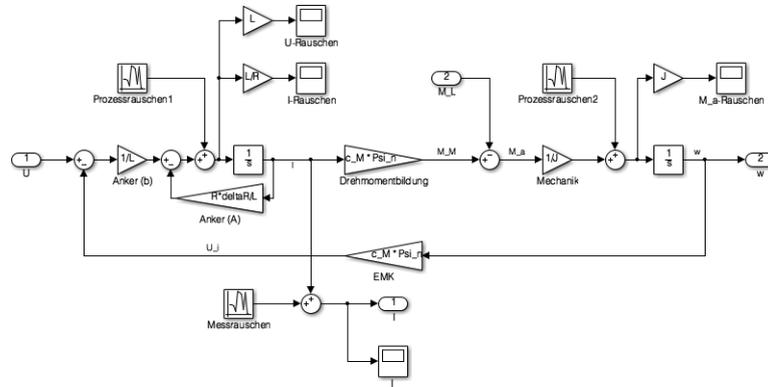
- [1] Grewal, Mohinder S.; Andrews, Angus P.: *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*. Third Edition, Wiley-Verlag, 2008.
- [2] Lunze, Jan: *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Springer-Verlag, 2008.
- [3] Lunze, Jan: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Springer-Verlag, 8. Auflage, 2010.
- [4] Holzhüter, Prof. Dr. Thomas: *Zustandsregelung*. Skript, Fachhochschule Hamburg, Fachbereich Elektrotechnik und Informatik, 2009. <http://users.etech.haw-hamburg.de/users/holzhueter/zureg.pdf>, letzter Aufruf: 10.01.2010.
- [5] Abbott, Dr. Jake: *Kalman Filter (Continuous Time)*. Vorlesungsvideo zum Modul *State-Space Control Systems*, Department of Mechanical Engineering, The University of Utah. <https://www.youtube.com/watch?v=4Ef1R006DnY>, letzter Aufruf: 10.01.2010.
- [6] Föllinger, Otto: *Regelungstechnik – Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 8. Auflage, Hüthig Buch Verlag Heidelberg, 1994.
- [7] Ludyk, Günter: *Theoretische Regelungstechnik 2 – Zustandsrekonstruktion, optimale und nichtlineare Regelung*. Springer-Verlag, 1995.

Quellen direkter Zitate stehen unmittelbar hinter dem Zitierten, das in Anführungszeichen steht, sofern das Zitierte keine Zahl ist. Quellen indirekter Zitate sind dagegen wie folgt angeben: Quellenangaben vor einem Satzpunkt beziehen sich auf den Satz. Quellenangaben hinter einem Satzpunkt beziehen sich auf alles vor der Quellenangabe bis zum Absatzanfang.

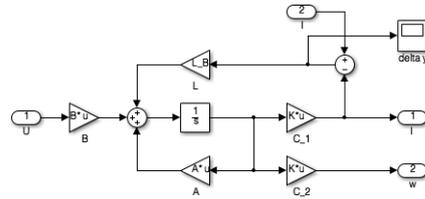
Anhang

Screenshots Simulink-Modell

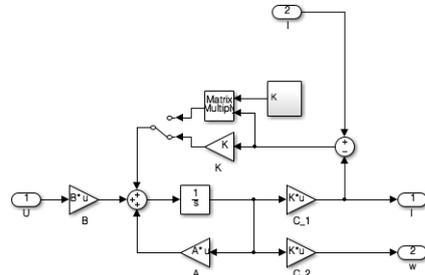
Laplace-Bereichs-Modell



Luenberger-Beobachter



Kalman-Filter




```

B_d = [0; -1/J];

% Prüfung der Beobachtbarkeit
display('Rang_S_B=')
rank(observ(ss(A, B, C_1, 0)))

%% Berechnung des Luenberger-Beobachters
display('——Berechnung_des_Luenberger-Beobachters——')

% Faktor, um wie weiter links die Pole plaziert sein sollen
k = 4;
display('eig(A) =')
eig(A)

% L_B aus analytischer Berechnung
L_B = [(k-1)*R/L; -(k^2 - 1)*c_M*Psi_n/J]
display('eig(A-L_B*C_1) =')
eig(A-L_B*C_1)

% L_B durch place()
L_B = place(A', C_1', k * eig(A))'
display('eig(A-L_B*C_1) =')
eig(A-L_B*C_1)

% stationäre Abweichung
display('Stationäre_Abweichung_bei_90_Nm:')
deltaX = -(A - L_B*C_1)^-1 * B_d * 90

%% Berechnung des Kalman-Filters
display('——Berechnung_des_Kalman-Filters——')

% Beschreibung des Rauschens
TS = 0.0001;
sigma2_R = 10;

R_ = sigma2_R;
Q = [10000, 0; 0, 100];

% Bestimmung von L_K aus der modellierten Matrix-Riccati-DGL
P_0 = zeros(2);

% Bestimmung von L_K mit lqe()
K = lqe(A, eye(2), C_1, Q, R_)

% stationäre Abweichung
display('Stationäre_Abweichung_bei_90_Nm:')

```

```
deltaX = -(A - K*C_1)^-1 * B_d * 90
```

```
%% Erweitertes Zustandsraummodell
```

```
display('——_Erweitertes_Zustandsraummodell_——')
```

```
% Variablen
```

```
A_S = [-R/L, -c_M*Psi_n/L 0; c_M*Psi_n/J, 0, -1/J; 0, 0, 0];
```

```
B_S = [B; zeros(1)];
```

```
C_1S = [C_1, 0];
```

```
C_2S = [C_2, 0];
```

```
C_3S = [0, 0, 1];
```

```
B_dS = [B_d; 0];
```

```
% Prüfung der Beobachtbarkeit
```

```
display('Rang_S_BS_')
```

```
rank(obsv(ss(A_S, B_S, C_1S, 0)))
```

```
%% Berechnung des Störgrößen-Luenberger-Beobachters
```

```
display('——_Berechnung_des_Störgrößen-Luenberger-Beobachters_——')
```

```
% Faktor, um wie weiter links die Pole platziert sein sollen
```

```
display('eig(A_S)_')
```

```
eig(A_S)
```

```
% L_BS durch place()
```

```
lambda_S = k * eig(A_S);
```

```
L_BS = place(A_S', C_1S', lambda_S + [0; 0; 1.01*lambda_S(2)])'
```

```
display('eig(A_S-L_BS*C_1S)_')
```

```
eig(A_S-L_BS*C_1S)
```

```
%% Berechnung des Störgrößen-Kalman-Filters
```

```
display('——_Berechnung_des_Störgrößen-Kalman-Filters_——')
```

```
% Beschreibung des Rauschens
```

```
R_S = sigma2_R;
```

```
Q_S = [10000, 0, 0; 0, 100, 0; 0, 0, 100];
```

```
% Bestimmung von L_KS aus der modellierten Matrix-Riccati-DGL
```

```
P_0S = zeros(3);
```

```
% Bestimmung von L_KS mit lqe()
```

```
K_S = lqe(A_S, eye(3), C_1S, Q_S, R_S)
```

```
% Simulation  
sim('Simulationsmodell')
```